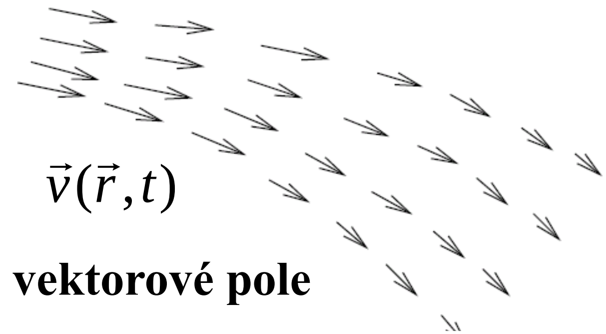
Opakování – Proudění, Hydrodynamika

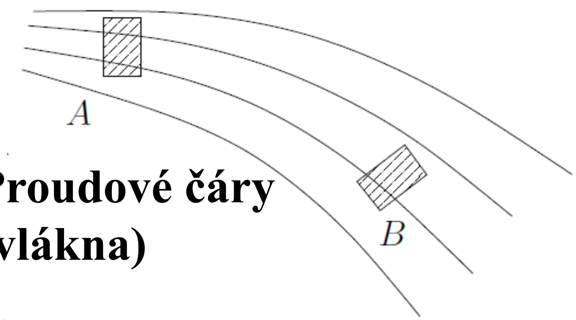
• Pohyb tekutiny vyšetřujeme vzhledem k soustavě souřadnic, která je např. pevně spojená s potrubím. Vzhledem k této soustavě má každá částice tekutiny rychlost:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$



vektorové pole

• Takto znázorněné vektory jsou tečnami ke křivkám, které nazýváme **proudnice**, nebo **proudové čáry**. Není-li proudění ustálené (stacionární), mění se obraz proudnic v každém okamžiku.



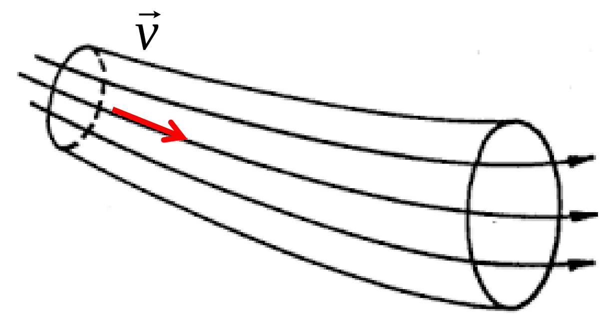
Proudové čáry (vlákna)

• Při **ustáleném proudění** se rychlost tekutiny v žádném místě nemění a

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

je statické vektorové pole.

• Při ustáleném proudění je tvar proudnic stejný a **proudnice** se shodují s **trajektoriemi** částic tekutiny hovoříme potom o **proudové trubici**.



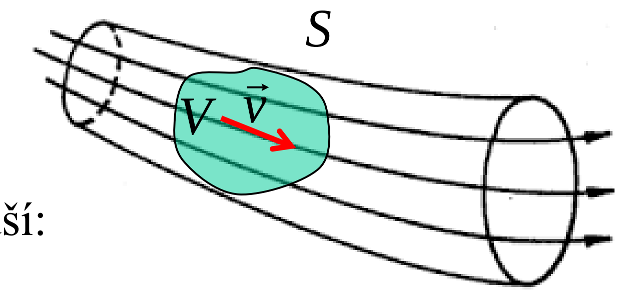
• Říkáme, že **proudění je vířivé**, jestliže :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \neq 0$$

• Říkáme, že **proudění je nevířivé (potenciálové)**, jestliže :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \operatorname{grad} f, \quad v_i = \frac{\partial f}{\partial i} \quad kde \quad i = x, y, z$$

Opakování – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



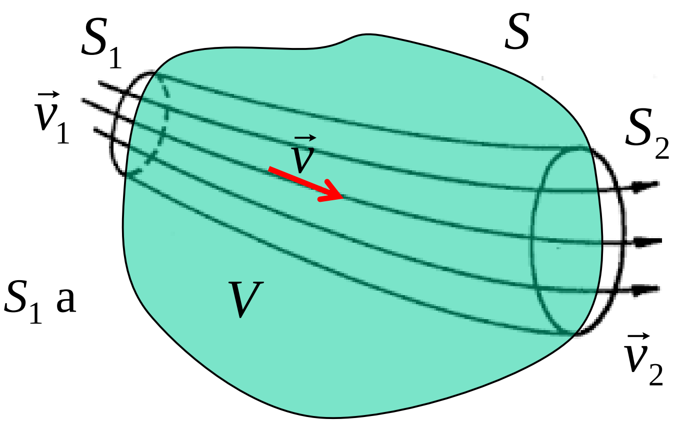
- **Rovnici kontinuity**:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V \qquad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

- Pro **ustálené** proudění **nestlačitené kapaliny** rovnice zjednoduší:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$



- do prostoru ohraničeného S vstupují částice tekutiny plochou S_1 a vystupují plochou S_2. Bude tedy:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \rho\vec{v}_1\mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \rho\vec{v}_2\mathrm{d}\vec{S}_2 = -Q_{m1} + Q_{m2} = 0 \Rightarrow Q_m = konst$$

- Za ustáleného proudění je hmotnostní tok tekutiny libovolným průřezem proudové trubice konstantní. Jsou-li rychlost v a hustota ρ v celém průřezu konstantní, lze rovnici kontinuity psát v jednoduchém tvaru: $$Q_m = \rho S v = konst.$$
- Pro nestlačitelnou kapalinu: $$Q_V = Sv = konst.$$

Opakování – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

• I pro tekutiny platí **pohybová rovnice kontinua**:

$$\sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = x, y, z$$

• **Eulerova hydrodynamická rovnice**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}, \quad i = x, y, z$$

• Cekem tedy dostaneme vyjádření pro **Bernoulliovu rovnici** pro **obecnou stlačitelnou tekutinu**:

$$\int d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int dU + \int \frac{dp}{\rho} = konst. \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} = konst.$$

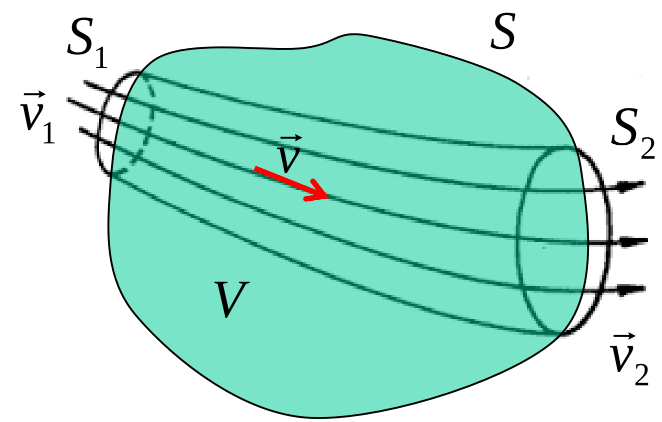
• **Bernoulliovu rovnici** pro nestlačitelnou **kapalinu**, kdy je hustota konstantní:

$$\rho = konst. \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{v^2}{2} + \rho U + p = konst.$$

• „Součet kinetické energie objemové jednotky kapaliny, její potenciální energie a tlaku je podél proudnice konstantní.“

• Pro libovolná dvě místa na stejné proudnici má tento výraz stejnou hodnotu:

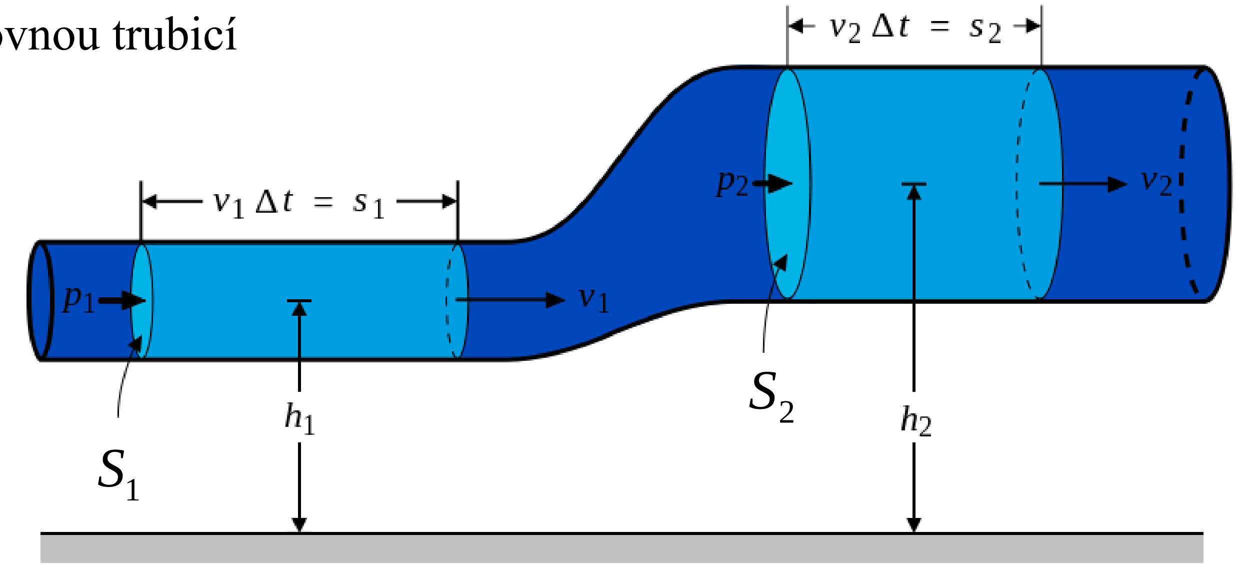
$$\frac{v_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + U_2 + \frac{p_2}{\rho}$$



Opakování – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- Příklad proudění kapaliny vodorovnou trubicí
- ideální (nestlačitelná) kapalina

$$\rho = konst.$$



- kdyby kapalina stála

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\rho U_1 + p_1 = \rho U_2 + p_2 \Rightarrow$$
$$p_2 - p_1 = \rho U_2 - \rho U_1 = \rho g \left(h_2 - h_1\right)$$

- **Bernoulliova rovnice:** $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = konst.$

- Rovnice kontinuity: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 = konst.$

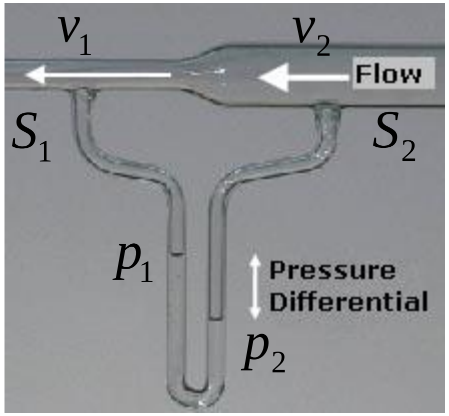
Opakování – Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($h = konst.$)
- Venturiho efekt

(nebo také hydrodynamický či aerodynamický paradox)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

dynamický tlak   statický tlak



$p_1 < p_2$

(rovnice kontinuity)

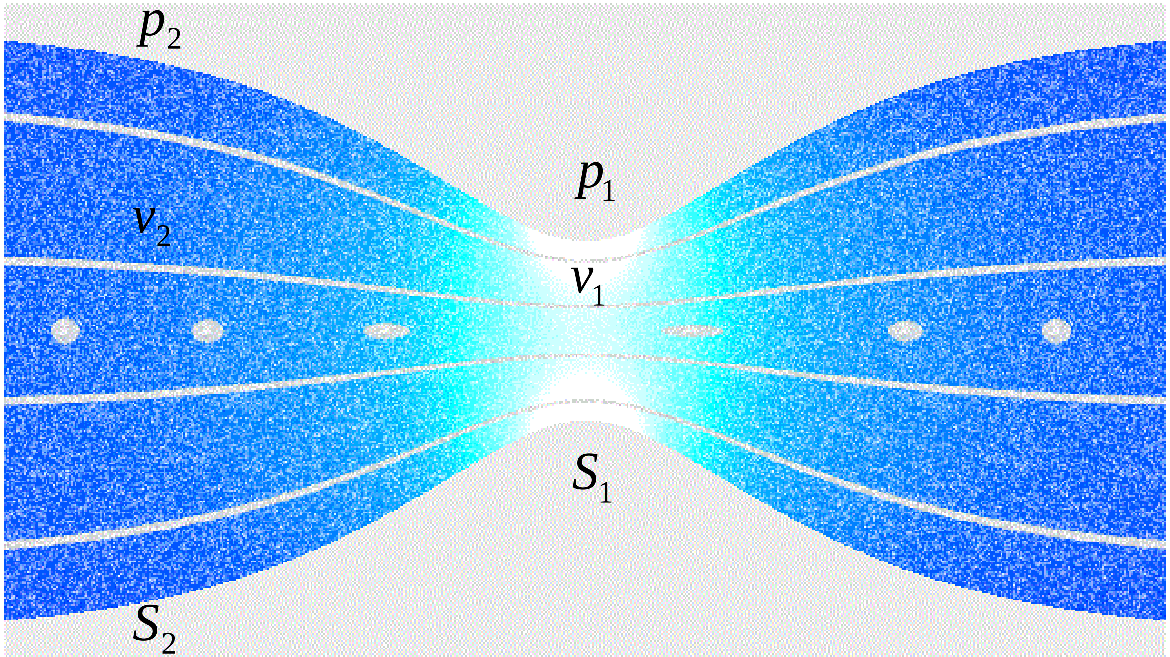
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

$$S_2 > S_1 \Rightarrow v_1 > v_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2$$

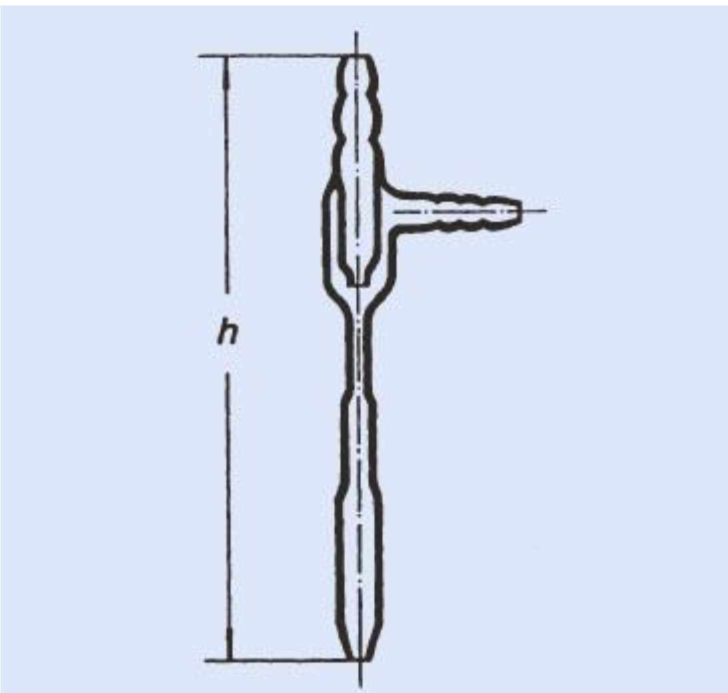


Opakování – Bernoulliova rovnice

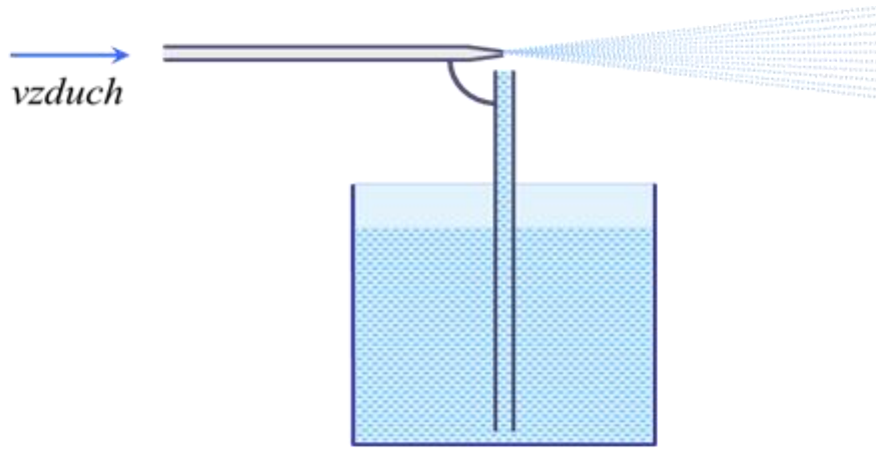
- pokud se nemění výška (*h* = *konst.*)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

- Vodní vývěva



- stříkací pistole



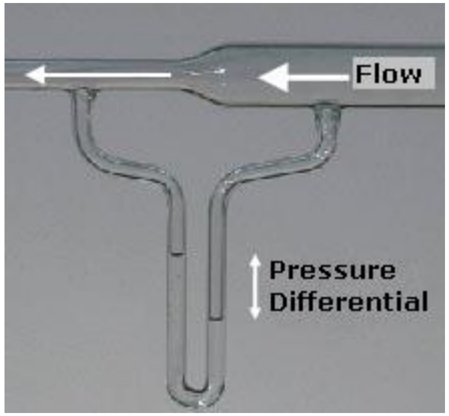
Opakování – Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška (h = *konst.*)

- Venturiho efekt

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

dynamický tlak statický tlak

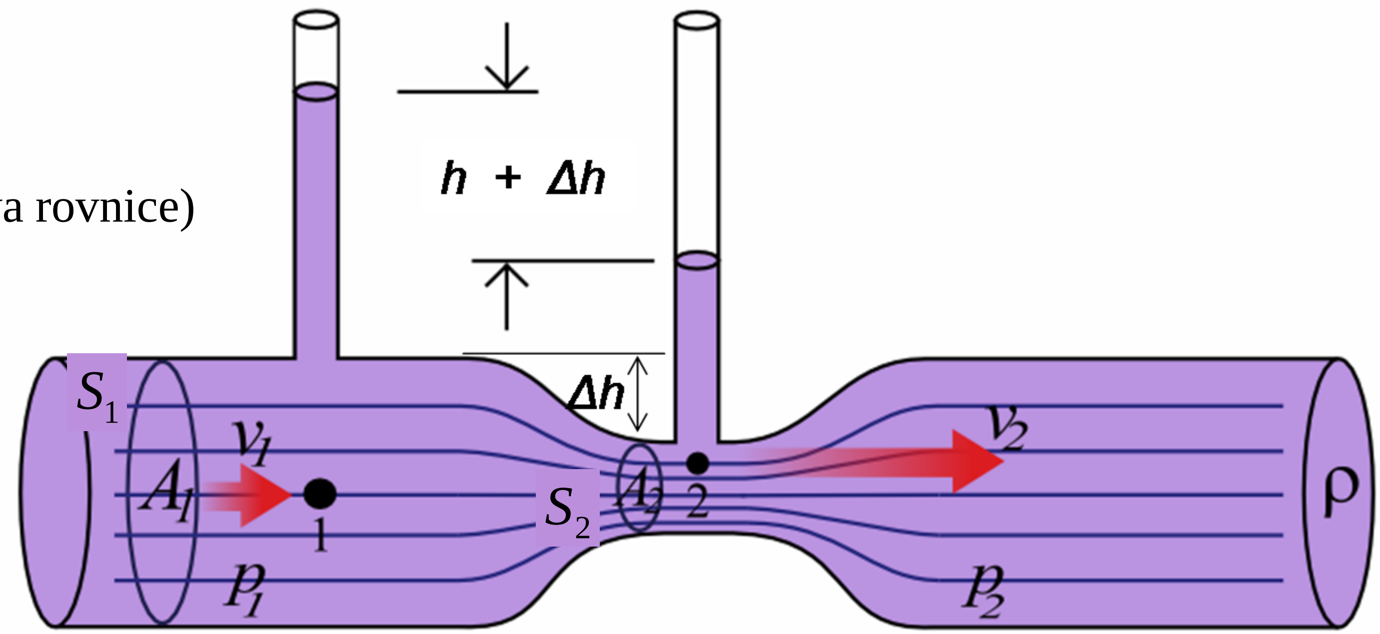


$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$



Opakování – Bernoulliova rovnice

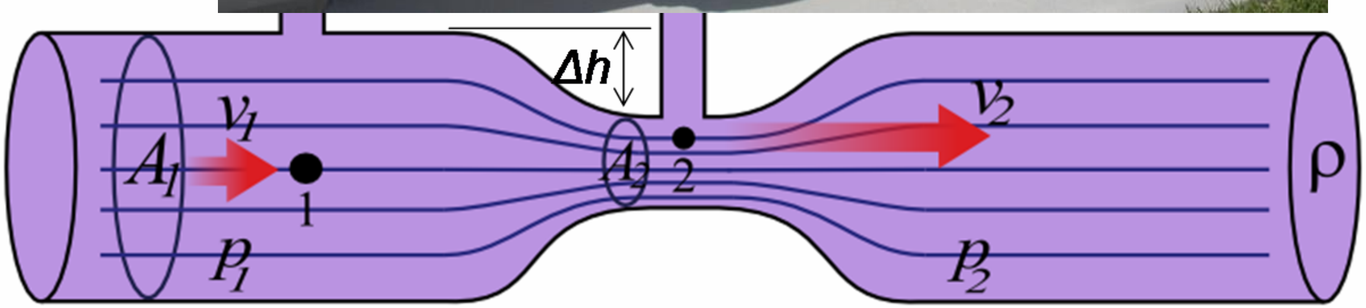
- pokud se nemění výška (h = *konst.*)
- Venturiho efekt

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$



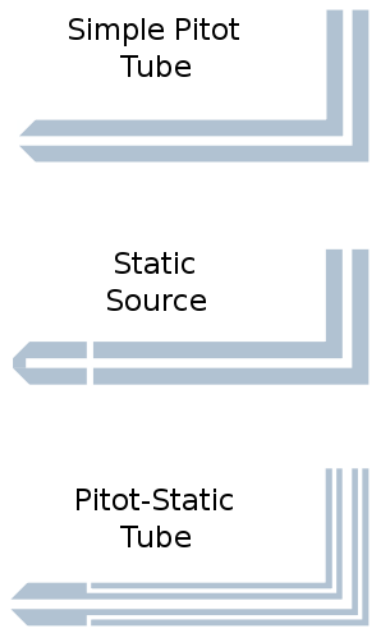
Opakování – Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška (h = *konst.*)
- Pilotova trubice

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

dynamický tlak statický tlak

Pitotova trubice z letounu F/A-18 Hornet



$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_{\text{tot}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p_{\text{tot}} - p)}{\rho}}$$

Opakování – Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($h = konst.$)
- Aerodynamický vztlak

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

(rovnice kontinuity)

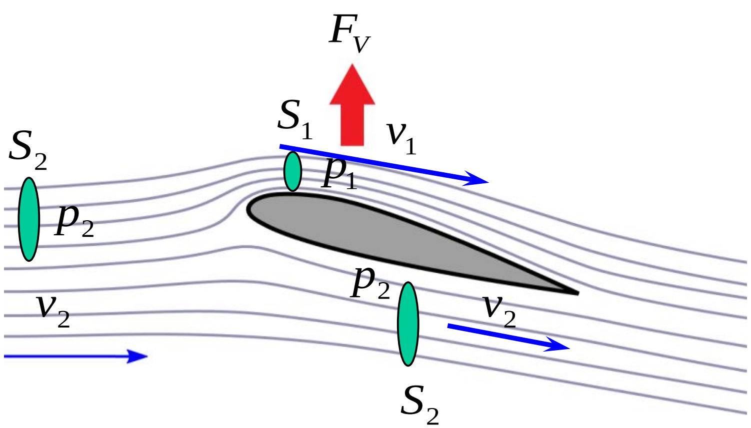
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

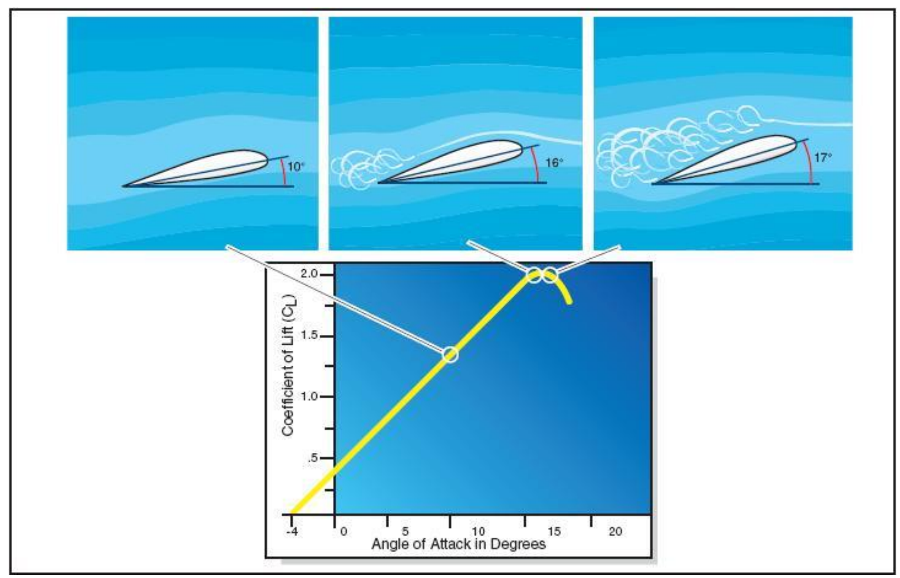
$$S_2 > S_1 \Rightarrow v_1 > v_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2 \Rightarrow F_V$$

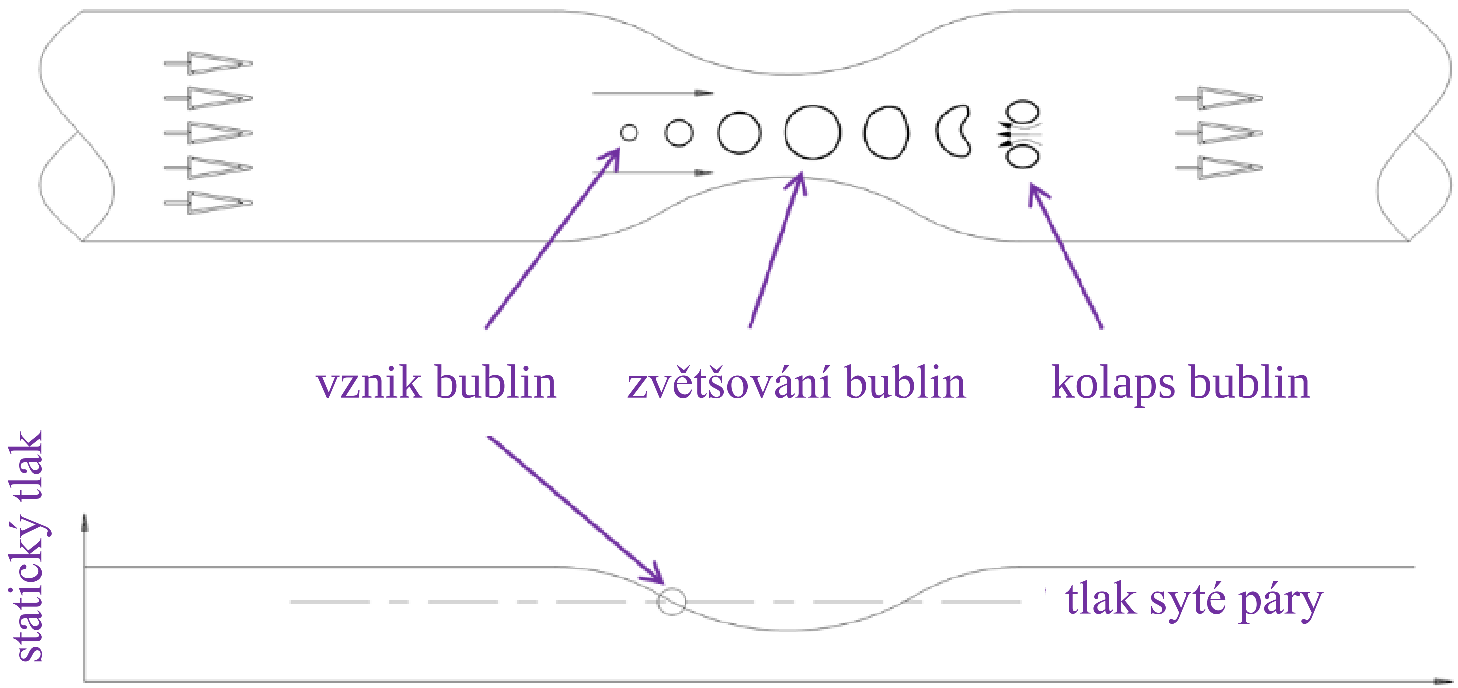




Opakování – Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška (h = *konst.)*
- Hydrodynamická kavitace – vznik dutin v kapalině při lokálním poklesu tlaku

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$



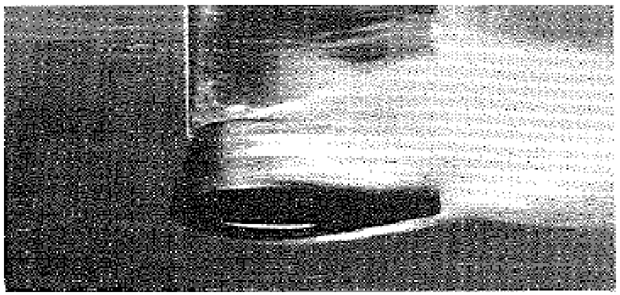
- Kavitace je zpočátku vyplněna vakuem, později se vyplní párou okolní kapaliny nebo do ní mohou difundovat plyny z okolní kapaliny.

Opakování – Bernoulliova rovnice

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

• pokud se nemění výška (*h*= *konst.*)

• Hydrodynamická kavitace – vznik dutin v kapalině při lokálním poklesu tlaku

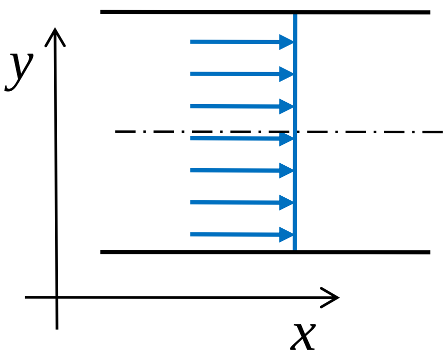


• Při vymizení podtlaku, který kavitaci vytvořil, její bublina kolabuje za vzniku rázové vlny s destruktivním účinkem na okolní materiál.

• Kavitace je zpočátku vyplněna vakuem, později se vyplní párou okolní kapaliny nebo do ní mohou difundovat plyny z okolní kapaliny.

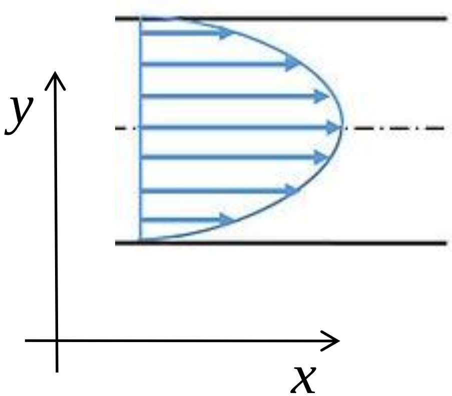
Proudění reálné kapaliny

• proudění ideální kapaliny



• stejná rychlost ve všech místech průřezu

• laminární proudění reálné kapaliny



• rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření

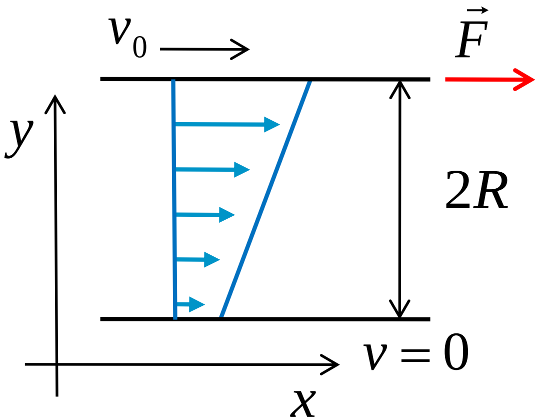
• nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule

• tečné napětí: $\tau = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (Newtonovské kapaliny)

• dynamická viskozita: $\eta = Ae^{B/T}$

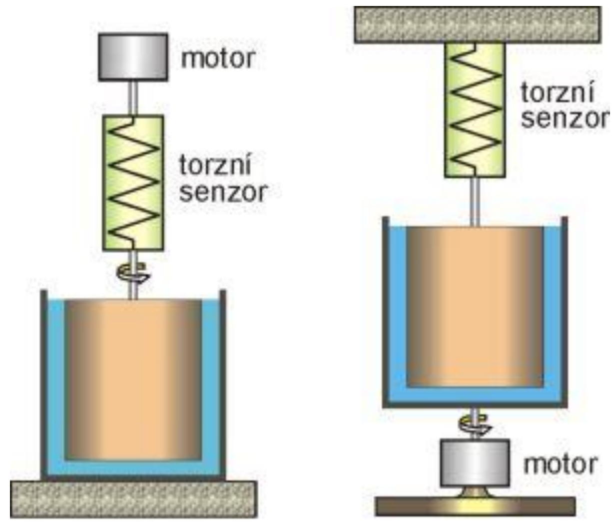
Proudění reálné kapaliny

- měření dynamické viskozity



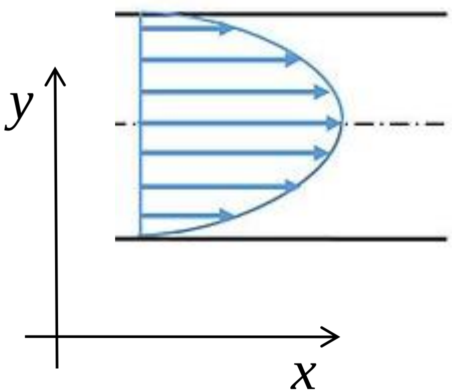
$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{2R}$$

- rotační viskozimetry



$$\varphi = K\eta\omega$$

- laminární proudění reálné kapaliny



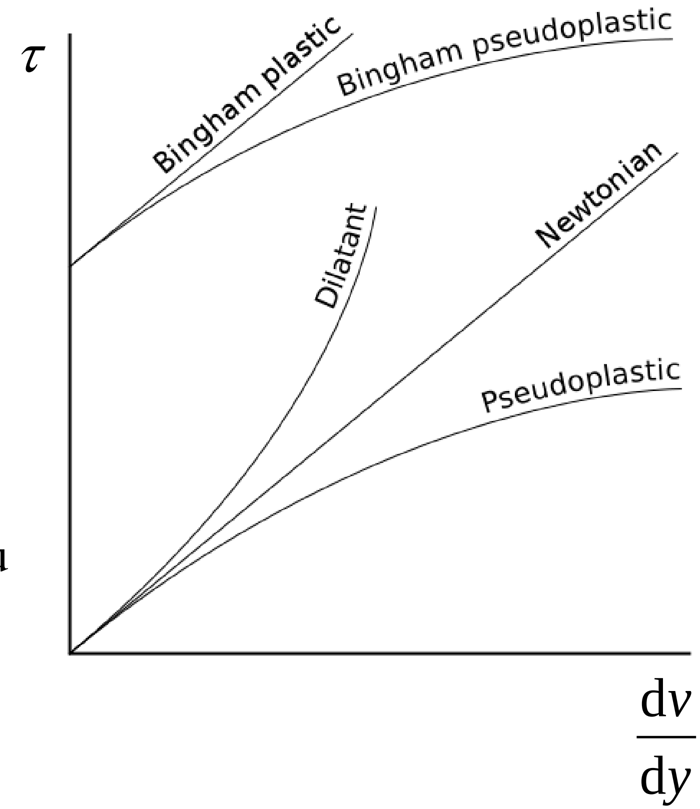
- rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření
- nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule
- tečné napětí: $\tau = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (Newtonovské kapaliny)
- dynamická viskozita: $\eta = Ae^{B/T}$

Proudění reálné kapaliny

- dynamická viskozita při 20°C
- voda: $\eta = 1 \times 10^{-3}$ Pas
- etanol: $\eta = 1.2 \times 10^{-3}$ Pas
- glycerín: $\eta = 1.48$ Pas
- med: $\eta = 2 - 10$ Pas

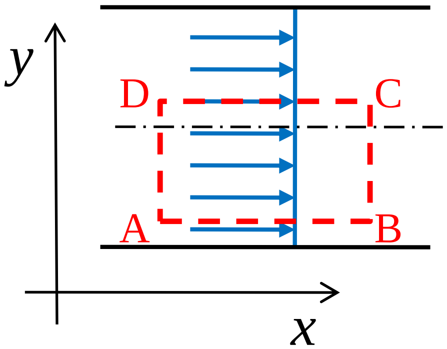
$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$ (Newtonovské kapaliny)

- nenewtonovské kapaliny
  - dilatantní: η narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)
  - pseudoplastické: η klesá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (krev, barva)
  - Binghamské tekutiny: potřebují určitou prahovou hodnotu smykového napětí aby začaly téci (jíl, zubní pasta, majonéza)



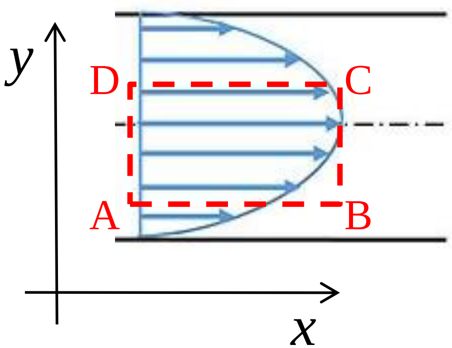
Proudění reálné kapaliny

- proudění ideální kapaliny



$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

- **laminární** proudění reálné kapaliny

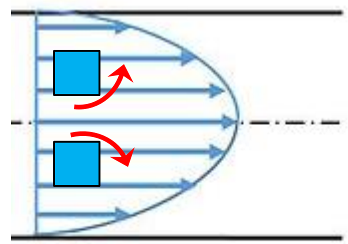


$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

- cirkulace vektoru rychlosti

$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \underbrace{\int_B^C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{0} + \int_C^D \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \underbrace{\int_D^A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{0}$$

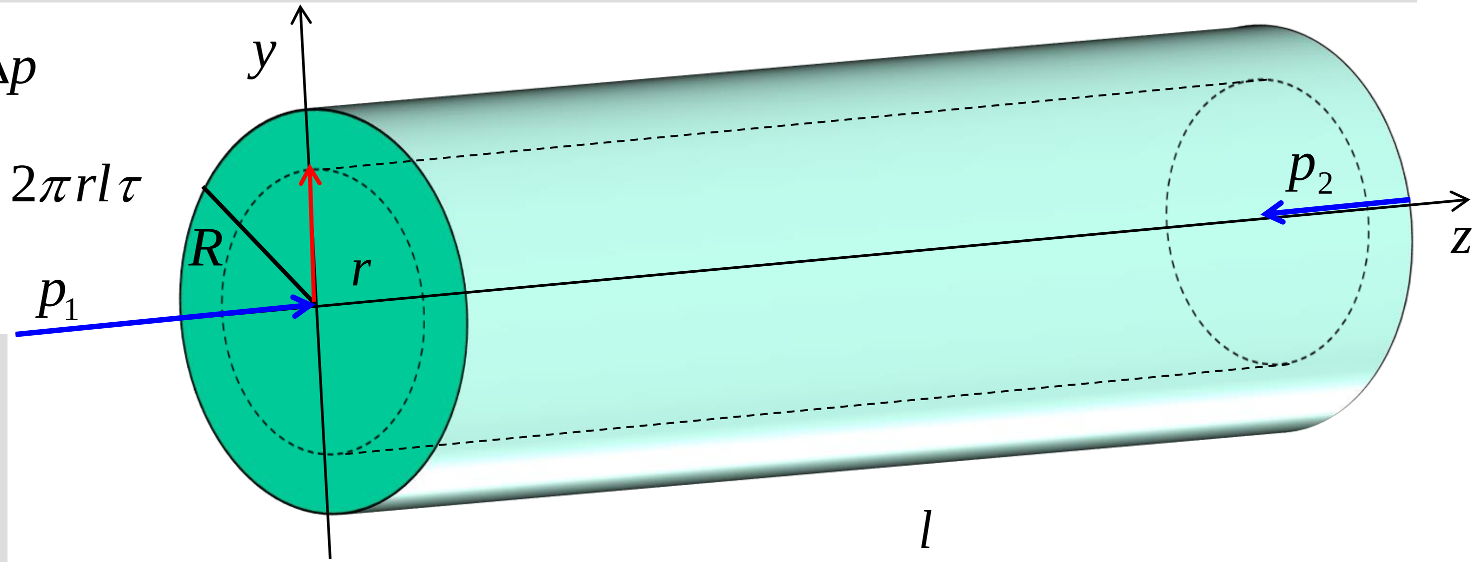
- Je-li cirkulace vektoru rychlosti nenulová, vytvářejí se v proudící kapalině **víry**. Spodní(horní) část elementu kapaliny se pohybuje rychleji.



- Podle intenzity vytváření vírů, můžeme proudění rozdělit na **laminární** a **turbulentní**. Při laminárním prodění se díky malé rychlosti víry znatelně nerozvinou a kapalina se nepromíchává.

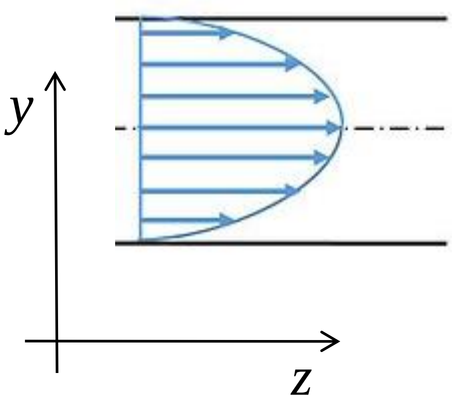
Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi r^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi r l \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



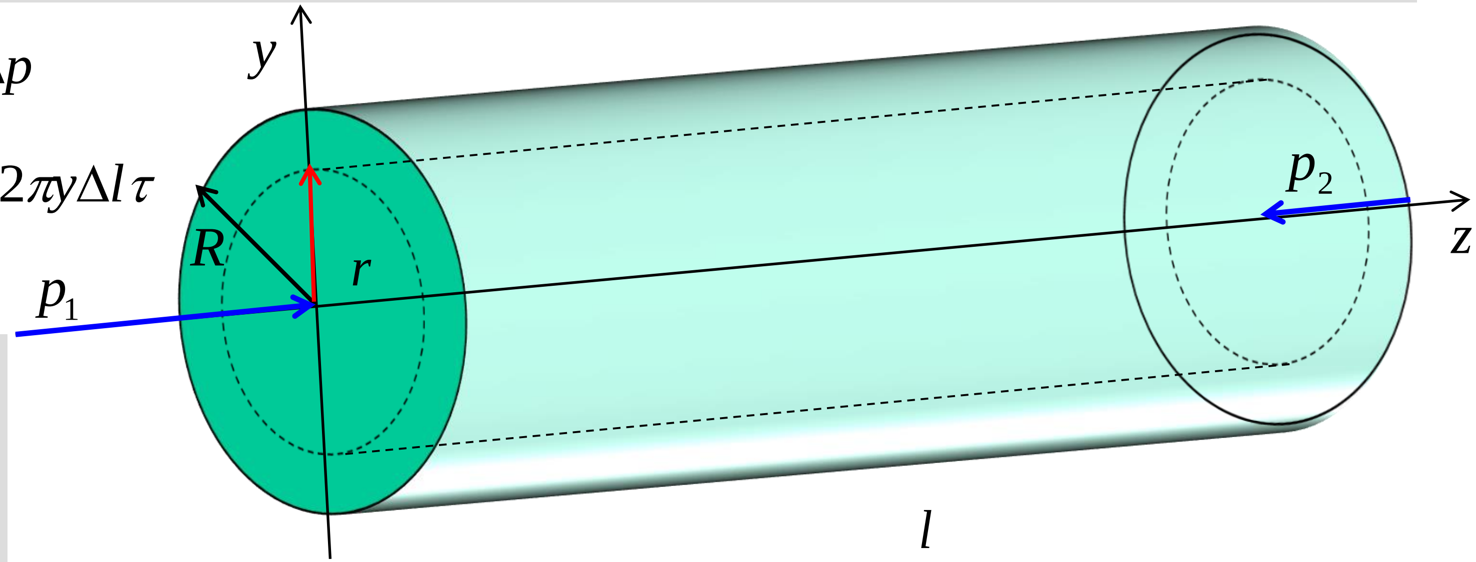
- ustálené laminární proudění: $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$

$$\tau = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2l\eta} r\,\mathrm{d}r \Rightarrow \; v = -\frac{\Delta p}{4l\eta} r^2 + C$$

$$v(R) = 0 \Rightarrow C = \frac{\Delta p}{4l\eta} R^2$$

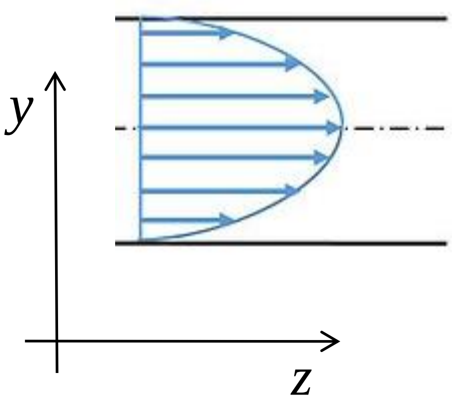
Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l\, \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



- Objemový průtok potrubím Q

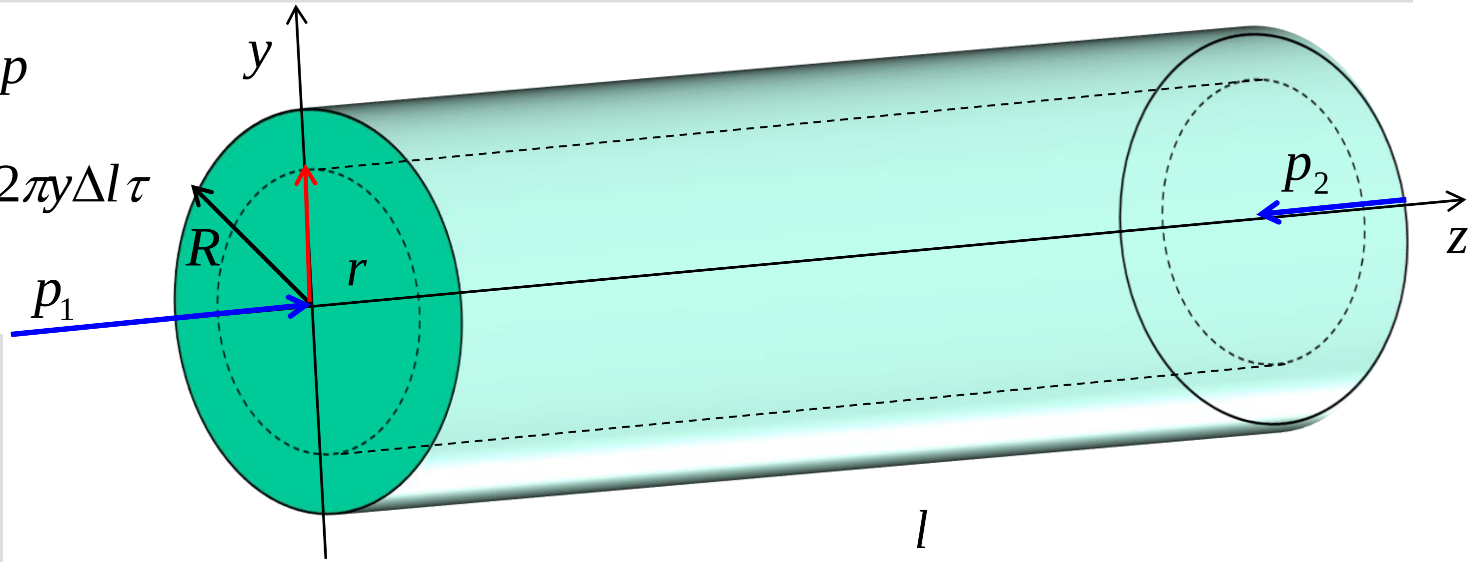
$$\mathrm{d}Q = v\,\mathrm{d}S \Rightarrow Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\Delta p}{4l\eta} 2\pi \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

- **Hagen-Poiseuillův zákon:** $Q = \dfrac{\pi \Delta p}{8 l \eta} R^4$

- střední rychlost proudění $\bar{v} = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ - rychlost jakou by kapalina musela proudit v celém potrubí, aby se dosáhlo stejného Q

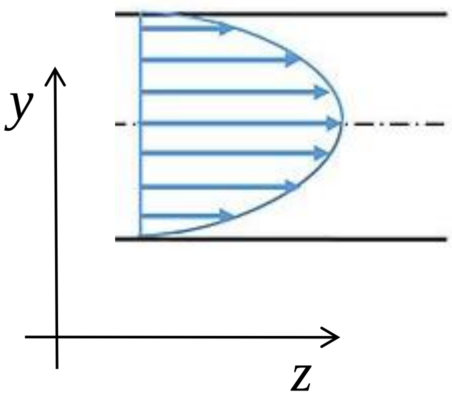
Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



- Zda v trubici nastane laminární nebo turbulentní proudění lze stanovit podle bezrozměrného **Reynodlsova čísla**:

$$Re = \frac{\rho R \bar{v}}{\eta}$$

$$je - li\ Re < Re_K \Rightarrow Laminární\ \ proud.$$

$$je - li\ Re > Re_K \Rightarrow Turbulentní\ \ proud.$$